⋆ ⋆

Exercice 1

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x+y &= 3 \\ \ln(x)+\ln(y) &= 0 \end{cases}$$

⋆

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$ définie sur $[0,+\infty[$.

1) Étudier les variations de f sur $[0,+\infty[$
2) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$
3) Calculer l'équation de la tangente à la courbe de f en $x=0$ et en $x=1$
On rappelle que lorsque f est une fonction dérivable, l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

4) Représenter la courbe représentative de f dans un repère, en faisant apparaître les tangentes aux points d'abscisse 0 et 1.

⋆

Exercice 3

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{2x+5}$
2) $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x+7}\right)$
3) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
4) $f : x \mapsto \tan(\exp(x^2))$

⋆

Exercice 4

Pour chacune des fonctions suivantes

- Déterminer l'ensemble de définition
- Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition et préciser les équations des asymptotes éventuelles.
- Étudier les variations

1) $f_1(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$
2) $f_2(x) = \ln(x+1) - x^2$
3) $f_3(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1 - x}$
4) $f_4(x) = \ln(2+\sin x)$
5) $f_5(x) = \ln(\cos^2 x)$
6) $f_6(x) = \sqrt{\tan x}$

⋆

Exercice 5

Étudier l'existence d'asymptotes horizontales pour les fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x+2x}{\mathrm{e}^x - x}$
2) $f_2(x) = \dfrac{\ln x + x^2}{1-\ln x}$
3) $f_3(x) = \dfrac{x^2+x+1}{1-3x}$
4) $f_4(x) = \dfrac{x^2+x+\mathrm{e}^{2x}}{x^2-\mathrm{e}^x}$
5) $f_5 = \dfrac{(\ln x)^{100}}{\sqrt{x}}$
6) $f_6 = \dfrac{1+\sqrt{\mathrm{e}^x}}{1+\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$

⋆

Exercice 6

Soit $0<a<b$ deux réels fixés. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{x+b} - \sqrt{x+a}$$

1) Montrer que $f(x) = \dfrac{b-a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$
2) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

⋆ ⋆

Exercice 7

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ deux entiers et soit f la fonction définie par

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$$

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1} = n$ et $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m-1}{x-1} = m$
2) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1.

⋆

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-8x}}{1-x}$$

Dresser le tableau de variations complet (avec limites) de la fonction f.
Représenter la courbe représentative de f dans un repère.

⋆ ⋆

Exercice 9

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2) Étudier les asymptotes de f et représenter sa courbe représentative dans un repère.

⋆ ⋆

Exercice 10

On considère la fonction $f : x \longmapsto x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Montrer que f peut se prolonger par continuité en une fonction $\widehat{f}$ continue sur $\mathbb{R}$.

⋆ ⋆

Exercice 11

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto (x-1)\ln(|x-1|) \end{aligned}$$

Montrer que f peut se prolonger par continuité en une fonction $\widehat{f}$ continue sur $\mathbb{R}$.

⋆

Exercice 12

On considère la fonction $f : x \longmapsto x + \ln x$

1) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
2) Donner un encadrement d'amplitude 1 de α

★
Exercice 13

1) f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^x - 1$$

 a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier ses variations.
 b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0;+\infty[$
 c) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant la valeur de x

2) g est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = (x-1)(\mathrm{e}^x - 1)$$

 a) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$ et étudier le sens de variation de g
 b) Montrer que $g(\alpha) = -\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

★
Exercice 14

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe un réel $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

★
Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+x^2}$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$. On note x_1 et x_2 ces solutions.
2) Montrer que $x_1 = -x_2$ et que $|x_1| < 1$.

★
Exercice 16

Soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction de la valeur de k le nombre de solutions de l'équation $x^4 - x^3 = k$.

★ ★
Exercice 17

Montrer que l'équation $\cos(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ admet une infinité de solutions.

★ ★
Exercice 18

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n + x - 1$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x_n \in]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2) Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante.
3) En déduire que (x_n) converge vers une limite $\ell \leq 1$.
4) On suppose que $\ell < 1$. Étudier la la limite de $(f_n(x_n))$ et conclure.

★ ★
Exercice 19

On admet dans cet exercice que $0,69 < \ln 2 < 0,7$.

Partie 1

On considère l'application $g :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2 + \ln x$

1) Montrer que g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$. On note α l'unique solution de cette équation.
3) Montrer que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

Partie 2

On note $I=\left[\frac{1}{2};1\right]$ et on considère l'application $f:I\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{4}\ln x$

4) a) Montrer que f est strictement croissante sur I
   b) Montrer que $\frac{1}{2}<f\left(\frac{1}{2}\right)<f(1)<1$
   c) En déduire que $\forall x\in I,\ f(x)\in I$
5) On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$
   a) Calculer u_1
   b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in I$
   c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   d) Montrer que la suite (u_n) converge et que sa limite est α.

★ ★

Exercice 20

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue qui admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

★

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{3x}}{1+\mathrm{e}^{3x}}$.

1) Déterminer $f(\mathbb{R})$
2) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})$.
3) Déterminer une expression de $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

★

Exercice 22

On considère les fonctions ch et sh (cosinus et sinus hyperboliques) définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{ch}(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\quad\text{et}\quad \mathrm{sh}(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

1) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ ch^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=1$
2) Étudier la parité de ch et sh
3) Montrer que $\forall a,b\in\mathbb{R},\ \mathrm{ch}(a+b)=\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b)+\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$ et $\mathrm{sh}(a+b)=\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b)=\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b)$.
4) Justifier que ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{ch}'(x)=\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{sh}'(x)=\mathrm{ch}(x)$.
5) Montrer que $x\mapsto\mathrm{sh}(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
6) Étudier les limites de $\mathrm{sh}(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et en déduire que sh admet une bijection réciproque.
7) Déterminer une formule explicite de $\mathrm{sh}^{-1}(x)$.
8) Justifier que sh^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que sa dérivée est $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

★

Exercice 23

Soit $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\longmapsto\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ une fonction polynôme de degré $n\geq 1$.
Montrer que P est une fonction paire si et seulement si tous ses coefficients de degrés impairs sont nuls.
Montrer que P est une fonction impaire si et seulement si tous ses coefficients de degrés pairs sont nuls.

★ ★

Exercice 24

Soit P un polynôme de degré $n\geq 1$.

1) Montrer que si n est impair, alors P admet au moins une racine réelle.
2) Montrer que si n pair, alors P admet un extremum global.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 25

Dans cet exercice, on s'intéresse au problème suivant : étant donné $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une famille de n réels distincts, et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ une famille de n réels quelconques, on souhaite déterminer un polynôme P de degré $n-1$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(a_k) = b_k$ (c'est un problème **d'interpolation)**).

1) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $L_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$ appelé k-ième **polynôme interpolateur de Lagrange**. Montrer que $\forall (k, i) \in [\![1, n]\!]^2$ on a
$$L_k(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
2) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que $P = \sum_{k=1}^{n} P(a_k) L_k$.
3) En déduire un polynôme qui répond au problème posé.

⋆ ⋆
Exercice 26

Montrer que pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$